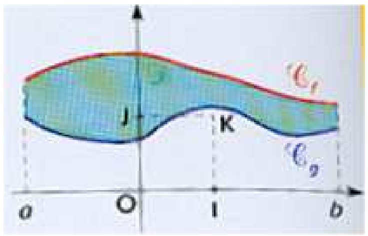
AIRE D'UN DOMAINE COMPRIS ENTRE DEUX COURBES

Travaux pratiques	*Terminale S*

$\left(O\ ;\ \overrightarrow{OI},\ \overrightarrow{OJ}\right)$ est un repère orthogonal. L'unité d'aire est l'aire du rectangle OIKJ.

1) Deux fonctions continues et positives sur [a ; b]

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur $[a\ ;\ b]$ telles que pour tout x de $[a\ ;\ b]$, $f(x) \geq g(x)$.
$(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ sont les courbes représentatives de f et de g.
$\mathcal{D}_1$ est le domaine situé sous la courbe $(\mathcal{C}_f)$, $\mathcal{D}_2$ est le domaine situé sous la courbe $(\mathcal{C}_g)$, et $\mathcal{D}$ est le domaine compris entre $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.

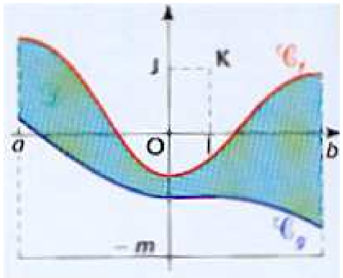


a) Exprimer aire $(\mathcal{D})$ en fonction de aire $(\mathcal{D}_1)$ et aire $(\mathcal{D}_2)$.

b) En déduire que aire $(\mathcal{D}) = \int_a^b (f-g)(x)dx$.

2) Deux fonctions continues sur [a ; b]

Soit f et g deux fonctions continues et positives sur $[a\ ;\ b]$ telles que pour tout x de $[a\ ;\ b]$, $f(x) \geq g(x) \geq -m$ (où m est un réel positif).
$(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ sont les courbes représentatives de f et de g.
$\mathcal{D}$ est le domaine compris entre $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$.



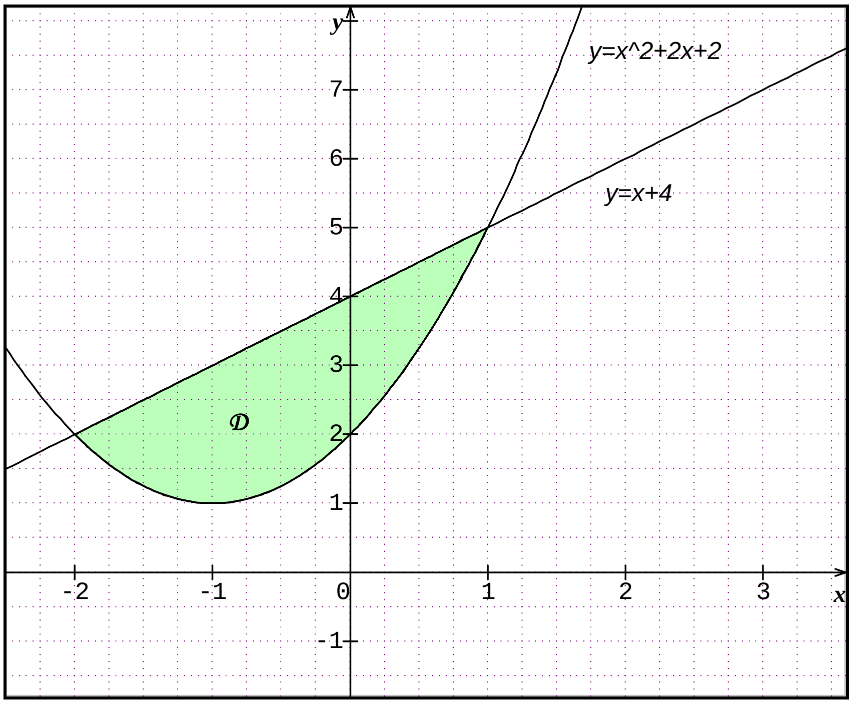
a) Soit h et k les fonctions définies sur $[a\ ;\ b]$ par $h(x) = f(x) + m$ et $k(x) = g(x) + m$.
Vérifier que pour tout x de $[a\ ;\ b]$, $h(x) \geq k(x) \geq 0$.
b) $\mathcal{D}'$ est le domaine compris entre les courbes représentant h et k.
Expliquer pourquoi aire $(\mathcal{D})$ = aire $(\mathcal{D}')$.

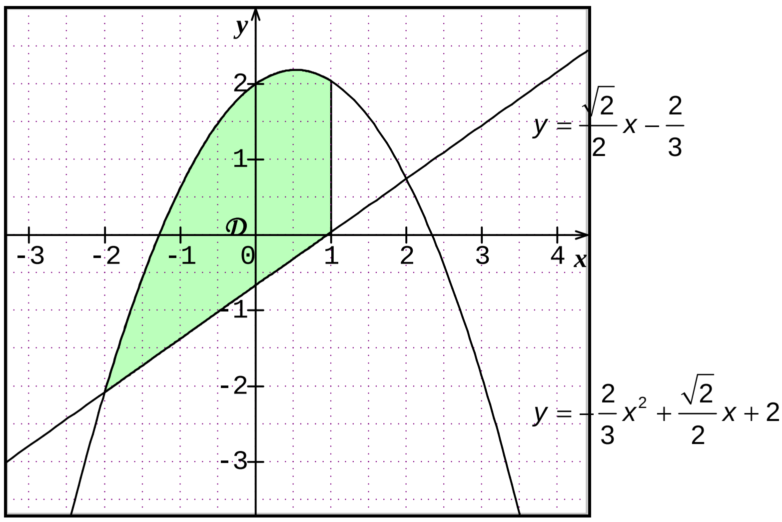
En déduire que aire $(\mathcal{D}) = \int_a^b (f-g)(x)dx$.

3) Applications

On donne $\int_{-2}^{1} x^2 dx = 3$.
Calculer l'aire en cm^2 de chacun des domaines coloriés.

C. Lainé


y=x^2+2x+2
y=x+4
𝒟


$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{2}{3}$
$y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x + 2$
𝒟